1　Zariski 環の特徴づけ

1.1　主張

定理 1.1. A をネーター環で I 進位相を入れているものとする. このとき以下は同値である.

1. $I \subset \operatorname{rad} A$
2. 任意の A のイデアルは閉である.
3. 任意の A の極大イデアルは閉である.
4. $\hat{A}$ は A 上忠実平坦である.

松村英之「復刊 可換環論」では 3 つの条件を考えていますが, 2 つ目の条件は上のように極大イデアルに置き換えることができます. さらに次に説明する証明では一つ補題を導入することで見通しよく示すことができることを見ます.

1.2　主張の証明

1 ならば 2 は定理 8.6(i) で既に示されています. また, 2 ならば 3 は自明です. ここで次の補題を示します.

補題 1.2. A をネーター環で I 進位相を入れているものとする. J を A のイデアルとすると

$$J\hat{A} \cap A = \overline{J}$$

ただし $\overline{J}$ は A における閉包である.

証明. $\psi\colon A \to \hat{A}$ を自然な写像, $p\colon A \to A/J$ を自然な全射とすると, 定理 8.12 で示したように

$$\operatorname{Ker} \hat{p} = J\hat{A}$$

である. すると $J\hat{A} \cap A = \operatorname{Ker}(\hat{p} \circ \psi)$ なので, これが

$$\overline{J} = \bigcap_{n \geq 1} (J + I^n)$$

と等しいことを示せばよい. これは線形位相の定義に従えば, $x \in \operatorname{Ker}(\hat{p} \circ \psi)$ が次と同値である.

$$\left(\overline{x} + \frac{J + I^n}{J} \right)_{n \geq 1} = 0$$

ここで $\overline{x} \in A/J$ である. このことから

$$\forall n \geq 1,\ x \in J + I^n$$

となるので示された. □

3 ならば 4 について, $\mathfrak{m}$ が閉なので $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$ です. すると補題より

$$\mathfrak{m}\hat{A} \cap A = \overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$$

です. $\mathfrak{m}\hat{A} = \hat{A}$ と仮定すると, 上の式は $A = \mathfrak{m}$ となって矛盾するため $\mathfrak{m}\hat{A} \neq \hat{A}$ です. 定理 8.8 より $\hat{A}$ は A 上平坦であることと, 定理 7.2 を用いれば $\hat{A}$ は A 上忠実平坦であることが分かります.

次に 4 ならば 3 について, 定理 7.5 より

$$\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A,\ \mathfrak{m}\hat{A} \cap A = \mathfrak{m}$$

なので補題から $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$ です. したがって任意の極大イデアルは閉であることが分かります.

最後に 3 ならば 1 について, $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$, $I \subset \mathfrak{m}$ を示せば十分です. $I \not\subset \mathfrak{m}$ ならば $\mathfrak{m} \subset\neq I + \mathfrak{m}$ で, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ より $I + \mathfrak{m} = A$ です. すると

$$V(I^n + \mathfrak{m}) = V(I + \mathfrak{m}) = V(A) = \emptyset$$

なので $I^n + \mathfrak{m} = A$ です. 従って次の式から $\mathfrak{m}$ が閉であることに矛盾します.

$$\overline{\mathfrak{m}} = \bigcap_{n \geq 1} (\mathfrak{m} + I^n) = A \neq \mathfrak{m}$$