1　高度を決定する生成元の決定について

1.1　主張

まず, 定理 17.4(i) の証明の 1 行目での議論を整理すると次のようになります.

定理 1.1. A をネーター環, I を A の真のイデアルとする. このとき $\operatorname{ht} I = r$ ならば, $a_1, \ldots, a_r \in I$ を

$$\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i,\ (1 \leq i \leq r)$$

を満たすように選ぶことができる.

また同じ議論が定理 17.6 の 6 行目から 7 行目にかけても使われています. 定理 15.6 の証明中でも使われていますが, これについては後述します.

1.2　主張の証明

$r = 0$ のときは自明に成り立つので, $r > 0$ とします. $\operatorname{Min} A = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ とすると, $\operatorname{ht} I > 0$ なので $\forall 1 \leq i \leq n,\ I \not\subset \mathfrak{p}_i$ となります. prime avoidance を用いれば

$$a_1 \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

を取ることができます. このとき $\operatorname{ht} a_1 = 1$ です.

証明. まず標高定理より $\operatorname{ht} a_1 \leq 1$ である. (a_1) の極小素イデアルを $\mathfrak{p} \subset I$ としてとると, ある j で $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}$ となる. a_1 の定め方から $a_1 \in \mathfrak{p}$ かつ $a_1 \notin \mathfrak{p}_j$ なので, $\mathfrak{p}_j \subsetneq \mathfrak{p}$ となる. よって $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq 1$ だから $\operatorname{ht}(a_1) \geq 1$ も分かる. □

次に $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_{i-1}) = i - 1$ となるように $a_1, \ldots, a_{i-1} \in I$ が選ばれているとします. このとき $(a_1, \ldots, a_{i-1})$ の極小素イデアルを $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_m$ とすると,

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p}'_j = i - 1$$

となります.

証明. 各 $1 \leq j \leq m$ について, まず標高定理より $\operatorname{ht} \mathfrak{p}'_j \leq i - 1$ である. また, 高度の定義より

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p}'_j \geq \operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_{i-1}) = i - 1$$

となるので, $\operatorname{ht} \mathfrak{p}'_j = i - 1$ が分かる. □

今 $\operatorname{ht} I = r > i - 1$ なので, $\forall 1 \leq j \leq m,\ I \not\subset \mathfrak{p}'_j$ であり, prime avoidance を用いれば

$$a_i \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{p}'_j$$

を取ることができます. このとき $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i$ です.

証明. まず標高定理より $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) \leq i$ である. $(a_1, \ldots, a_i)$ の極小素イデアルを $\mathfrak{p}' \subset I$ としてとる. $(a_1, \ldots, a_{i-1}) \subset \mathfrak{p}'$ なので, ある j で $\mathfrak{p}'_j \subset \mathfrak{p}'$ となる. a_i の定め方から $a_i \in \mathfrak{p}'$ かつ $a_i \notin \mathfrak{p}'_j$ なので, $\mathfrak{p}'_j \subsetneq \mathfrak{p}'$ となる. よって

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p}' \geq \operatorname{ht} \mathfrak{p}'_j + 1 = i$$

だから $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) \geq i$ も分かる. □

1.3 定理 15.6 の証明について

定理 15.6 の証明中でも同様の議論が用いられています. 証明の 9 行目に上で示した主張がそのまま用いられていますが, 違いは素イデアル P について考えている点です. 主張を整理すると次のようになります.

系 1.2. A をネーター環, P を A の素イデアルとする. $\operatorname{ht} P = h$ ならば, $a_1, \ldots, a_h \in P$ を

$$\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i,\ (1 \leq i \leq h)$$

かつ, P が $(a_1, \ldots, a_h)$ の極小素イデアルとなるようにとることができる.

証明. P が $I := (a_1, \ldots, a_h)$ の極小素イデアルとなることのみ確かめる. P が I の極小素イデアルでないとすると, $I \subset P' \subsetneq P$ となる素イデアル P' が存在する. このとき $\operatorname{ht} P' < \operatorname{ht} P = h$ である一方, $\operatorname{ht} I \leq \operatorname{ht} P' < h$ となり, $\operatorname{ht} I = h$ であることに矛盾する. □

しかし, 定理 15.6 の証明では $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_h) = h$ であることは使わずに極小性について注目して議論を進めるので, 単に定理 13.6 を適用すれば十分です.