1　grade が無限となる場合について

1.1　主張

定理 16.6 を利用すると, $M \neq IM$ ならば

$$\mathrm{grade}(I, M) := \inf\{i \geq 0 \mid \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}$$

が I の中の極大 M 正則列の長さと一致することが分かるというのが定理 16.7 の主張でした. その 16.7 の直後で, $M = IM$ のときは $\mathrm{grade}(I, M) = \infty$ と規約すると述べられています. この規約が, 上で述べた grade の表し方と整合することを次の命題を示すことで確かめます.

命題 1.1. A をネーター環, I を A のイデアル, M を有限生成 A 加群とする. このとき

$$M = IM \iff \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) = 0 \quad (i \geq 0)$$

1.2　証明

($\Leftarrow$) は対偶を考えれば明らかであるから, ($\Rightarrow$) を示す.

$M = IM$ であると仮定する. 中山の補題から, ある $a \in I$ について $(1 - a)M = 0$ となる. よって a 倍写像 $M \xrightarrow{a} M$ は恒等写像である. 一方 $a \in I$ なので, $A/I \xrightarrow{a} A/I$ は零写像である. これらの 2 つの a 倍写像から導かれる Ext の射は一致して, a 倍写像

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \xrightarrow{a} \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M)$$

になる. これは恒等写像かつ零写像であるから, $\mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) = 0,\ (\forall i \geq 0)$ である.