1　非正則元からなるイデアルが素因子に含まれることについて

1.1　Prime Avoidance について

松村英之「復刊 可換環論」では演習問題 1.6 において Prime Avoidance が紹介されています. まずはその主張を復習しておきましょう.

補題 1.1 (Prime Avoidance)**.** A を可換環, I を A のイデアル, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} A$ とする. このとき

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

ならば, $I \subset \mathfrak{p}_i$ となる i が存在する.

特に $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ は素イデアルとは限らない一般の A のイデアルでも成り立つことが知られています.

1.2　主張

以下の補題は, 松村英之「復刊 可換環論」§ 16 以降において繰り返し用いられます. 証明は簡単ですが, その内容を確認します.

補題 1.2. A をネーター環, M を有限 A 加群とする. A のイデアル I が M 正則元を含まないならば, $\mathfrak{p} \in V(I) \cap \operatorname{Ass} M$ となるものが存在する.

証明. まず定理 6.1(ii) より, A における M 非正則元の集合は $\operatorname{Ass} M$ の全ての和集合であるから

$$I \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p}$$

である. ここで定理 6.5 より $\operatorname{Ass} M$ は有限集合である. そのため, Prime Avoidance を用いることで

$$I \subset \mathfrak{p}$$

となる $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ が存在することが分かる. これが $\mathfrak{p} \in V(I) \cap \operatorname{Ass} M$ を満たす. □

1.3　この議論を使う箇所

全てではありませんが, § 16 以降で上の補題が使われている部分をピックアップします. 例えば $\operatorname{depth}(I, M) = 0$ のとき I の中で M 正則列を取ることができない, すなわち I の中に M 正則元が存在しないとなり, 上の補題の状況になります.

- 定理 16.6 の 1 行目から 2 行目にかけて.
- 定理 16.8 の 2 行目.
- 定理 17.3(iii) の証明 4 行目から 5 行目にかけて.