1　冪級数環のファイバー環の次元について

1.1　主張

定理 15.4 の注 2 では次のことを説明しています.

定理 1.1. 一般に n 変数冪級数環のファイバー環の次元は n でない, 特に $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して

$$A[[X_1, \ldots, X_n]] \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \ncong \kappa(\mathfrak{p})[[X_1, \ldots, X_n]]$$

このような環 A の例が存在することを確かめます.

1.2　主張を満たす具体例

k を体, $A = k[y, z]$ として $A[[x]] \otimes_A \kappa(0)$ と $\kappa(0)[[x]]$ の次元が異なることを示します. まず $\kappa(0)[[x]]$ の次元は 1 で, 定理 15.4 より $A[[x]]$ の次元は $\dim A + 1 = 3$ となります.

$u(x), v(x) \in k[[x]]$ を k 上代数的独立なものとして取り,

$$\varphi \colon A[[x]] \to k[[x]]$$

を $\varphi(x) = x,\ \varphi(y) = u(x),\ \varphi(z) = v(x)$ で定めます. φ が well-defined であることを確認します.

証明. $f_i(y, z) \in k[y, z]$ として

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(y, z) x^i \in A[[x]]$$

とする. このとき $\varphi(f)$ は

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(u(x), v(x)) x^i$$

である. f_i は多項式なので $f_i(u(x), v(x)) \in k[[x]]$ として定まる. さらに $\varphi(f)$ の部分和 S_n を考えれば, $p \geq q \geq n$ において $S_p - S_q \in (x)^n$, すなわち $\{S_n\}_{n \geq 0}$ は (x) 進位相に関する Cauchy 列である. $k[[x]]$ は (x) 進位相に関して完備であるので, $\varphi(f) \in k[[x]]$ として定まることが分かる. □

このとき $k[[x]]$ の元をそのまま $A[[x]]$ の元と見なせば φ が全射であることが分かるので $P = \operatorname{Ker} \varphi$ とすれば

$$A[[x]]/P \cong k[[x]]$$

特に $k[[x]]$ は整域なので $P \in \operatorname{Spec} A[[x]]$ となります. ここから $M \in \operatorname{Max} A[[x]]$ として

$$P \cap A = 0,\ \operatorname{ht} M = 3,\ \operatorname{ht} P = 2$$

を確かめていきます.

1.2.1　$P \cap A = 0$ について

$f(y, z) \in P \cap A$ とします. すなわち $f \in k[y, z]$ です. このとき

$$\varphi(f(y, z)) = f(u(x), v(x)) = 0$$

となります. 今 $u(x), v(x)$ は k 上代数的独立なので $f = 0$ となるので $P \cap A = 0$ が分かります.

1.2.2 $\operatorname{ht} M = 3$ について

$M \in \operatorname{Max} A[[x]]$ は p.5 で見たように $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ を用いて $M = (\mathfrak{m}, x)$ と表されます. まず $\operatorname{ht} M \leq \dim(A[[x]]) = 3$ です. 次に, A について問題 5.1 より

$$\operatorname{ht} \mathfrak{m} = \dim A - \dim(A/\mathfrak{m}) = 2$$

なので $0 \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ という A の素イデアルの列が存在します. A がネーター環なので $\mathfrak{p}A[[x]] = \mathfrak{p}[[x]] \in \operatorname{Spec} A[[x]]$ となります. 同様に $\mathfrak{m}A[[x]] = \mathfrak{m}[[x]] \in \operatorname{Spec} A[[x]]$ となるので

$$0 \subsetneq \mathfrak{p}[[x]] \subsetneq \mathfrak{m}[[x]] \subsetneq M$$

という $A[[x]]$ の素イデアルの列が存在します. よって $\operatorname{ht} M \geq 3$ となるので $\operatorname{ht} M = 3$ が分かります.

1.2.3 $\operatorname{ht} P = 2$ について

P を含む $M \in \operatorname{Max} A[[x]]$ によって

$$\operatorname{ht} P = \operatorname{ht}(PA[[x]]_M)$$

です. 定理 5.3 より $\mathfrak{m}$ は 2 つの元で生成されます. $M = (\mathfrak{m}, x)$ なので $MA[[x]]_M$ は 3 つの元で生成されるので埋入次元について

$$\operatorname{edim}(A[[x]]_M) = \dim A = 3$$

です. すなわち $A[[x]]_M$ は正則局所環となります. 定理 17.8 より正則局所環は CM 環であり, 定理 17.4(i) より

$$\operatorname{ht}(PA[[x]]_M) = \dim(A[[x]]_M) - \dim(A[[x]]_M/PA[[x]]_M)$$

です. ここで $A[[x]]/P \cong k[[x]]$ は局所環であることから

$$A[[x]]_M/PA[[x]]_M \cong (A[[x]]/P)_M \cong k[[x]]$$

となるので $\dim(A[[x]]_M/PA[[x]]_M) = 1$ となります. 以上より $\operatorname{ht} P = 2$ となります.

1.2.4 まとめ

今示した $\operatorname{ht} P = 2$ から $0 \subsetneq P' \subsetneq P$ という $A[[x]]$ の素イデアルの列が存在します. $P \cap A = 0$ であることから, この素イデアルの列は $0 \in \operatorname{Spec} A$ の上にあることが分かります. 以上から $\dim(A[[x]] \otimes_A \kappa(0)) = 2$ が分かります. 一方, $\dim(\kappa(0)[[x]]) = 1$ なので,

$$A[[x]] \otimes_A \kappa(0) \ncong \kappa(0)[[x]]$$

が分かりました.