1　ファイバー環の次元について

1.1　主張

松村英之「復刊 可換環論」の定理 15.3 について, 日本語版では間違いが含まれています. ここでは英語版で修正された内容について見ていきます.

定理 1.1 (15.3)**.** $f\colon A \to B$ をネーター環の準同型で下降定理が成り立つものとする. $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ を A の素イデアルとすると

$$\dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \leq \dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{q}))$$

日本語版では B が鎖状環であることを仮定していますが, その仮定は不要です.

1.2　主張の証明

まず, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = 1$ の場合に示せば十分であることを示します. $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{q}$ の飽和した素イデアル鎖

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}$$

を取ると, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i) = 1$ となります. $\mathfrak{p}_{i+1}$ と $\mathfrak{p}_i$ の間で定理を適用すれば

$$\dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}_{i+1})) \leq \dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}_i))$$

であって, これをつなげれば

$$\dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \leq \dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{q}))$$

を得ます.

$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = 1$, $r = \dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$ とします. すると $\mathfrak{p}$ の上の長さ r の $\operatorname{Spec} B$ の列

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$$

を取ることができます. 以下, $\mathfrak{q}$ の上の $\operatorname{Spec} B$ の列

$$Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_r$$

を取ることができることを示します.

まず, A と B の間で下降定理が成り立つことから $Q_0 \subsetneq P_0$ を満たす $\mathfrak{q}$ の上の $Q_0 \in \operatorname{Spec} B$ を取ることができます. ここで $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$ と $Q_0 + xB$ の極小素イデアル $T_1, \ldots, T_s$ を取ると, $\mathrm{ht}(T_i/Q_0) = 1$ となります.

証明. B/Q_0 において $(Q_0 + xB)/Q_0$ は単項イデアルでその極小素イデアルが T_i/Q_0 なので, 標高定理から $\mathrm{ht}(T_i/Q_0) \leq 1$ である. また, $\mathrm{ht}(T_i/Q_0) = 0$ ならば B/Q_0 が整域であることから, $T_i = Q_0$ となる. しかし $x \notin \mathfrak{q}$ より $f(x) \notin Q_0$ であるが $f(x) \in T_i$ であって矛盾する. よって $\mathrm{ht}(T_i/Q_0) = 1$ である. □

このようにして $Q_0 \subsetneq P_0 \subsetneq P_1$ が得られたので $\mathrm{ht}(P_1/Q_0) \geq 2$ です. ここで, ある i で $P_1 \subset T_i$ とすると, $\mathrm{ht}(T_i/Q_0) = 1$ であることに矛盾するので, $P_1 \subset T_i$ となる i は存在しません. よって prime avoidance により

$$y \in P_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{s} T_i$$

を取ることができます. 今 $Q_0 + yB \subset P_1$ なので P_1 に含まれる $Q_0 + yB$ の極小素イデアル Q_1 が存在します. このとき $\mathrm{ht}(Q_1/Q_0) = 1$ であることが $\mathrm{ht}(T_i/Q_0) = 1$ と全く同様にして分かります. このことから, 特に $Q_0 \subsetneq Q_1$ です.

証明. 単項イデアル $(Q_0 + yB)/Q_0$ の極小素イデアル Q_1/Q_0 は標高定理より $\mathrm{ht}(Q_1/Q_0) \leq 1$ である. また, $\mathrm{ht}(Q_1/Q_0) = 0$ ならば $Q_1 = Q_0$ である. y の取り方から

$$\forall i,\ y \notin T_i,\ Q_0 \subset T_i$$

であるから $y \notin Q_0$ であるが, これは $y \in Q_1$ に矛盾する. □

さらに $Q_1 \cap A = \mathfrak{q}$ であることを示します.

証明. $Q_0 \subset Q_1 \subset P_1$ を A に引き戻すことで

$$\mathfrak{q} \subset Q_1 \cap A \subset \mathfrak{p}$$

となる. $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = 1$ の仮定から, $Q_1 \cap A = \mathfrak{q}, \mathfrak{p}$ である. $Q_1 \cap A = \mathfrak{p}$ と仮定すると $x \in \mathfrak{p}$ より $f(x) \in Q_1$ で, $Q_+ xB \subset Q_1$ となる. よって, ある i で $T_i \subset Q_1$ となるが, $\mathrm{ht}(T_i/Q_0) = \mathrm{ht}(Q_1/Q_0)$ なので $T_i = Q_1$ である. しかし Q_1 は $Q_0 + yB$ の極小素イデアルなので $y \in Q_1$ であるが, $y \notin T_i$ であって矛盾する. □

今, Q_0 から Q_1 を作った議論を繰り返すことで, 目的の $\mathfrak{q}$ の上の素イデアル列

$$Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_r$$

が得られます. これは $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{q})$ の素イデアル列に対応するので $r \leq \dim(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{q}))$ です.