

1 重複度の結合公式の証明

1.1 主張

記号の導入をします. ネーター環 A と A 加群 M に対して $\text{Ass } M$ の極小元を $\text{Min } M$ とし,

$$\text{Assh } M = \{\mathfrak{p} \in \text{Min } M \mid \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim M\}$$

と定めます. 定理 6.5 より $\text{Min } M$ は $\text{Supp } M$ の極小元の集合と一致しています. また, 再び定理 6.5 より M が有限 A 加群であれば $\text{Assh } M$ は有限集合であることも分かります.

以上を踏まえて, 松村英之「復刊 可換環論」の定理 14.7 の主張を見てみましょう.

定理 1.1 (14.7). $(A, \mathfrak{m})$ を d 次元ネーター局所環, M を有限 A 加群, $\text{Assh } A = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}$ とする. $\bar{q}_i$ を $\mathfrak{q}$ の $A/\mathfrak{p}_i$ における像とすると

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{i=1}^t e(\bar{q}_i, A/\mathfrak{p}_i) l_{A/\mathfrak{p}_i}(M_{\mathfrak{p}_i})$$

1.2 主張の証明

1.2.1 $\sigma = 0$ の場合

$\sigma = \sum_i l(M_{\mathfrak{p}_i})$ に関する帰納法で示します. 各 i に対して $l(M_{\mathfrak{p}_i})$ が 0 になるので右辺は 0 になります.

左辺について考えます. $l(M_{\mathfrak{p}_i}) = 0$ であることから各 i について $\mathfrak{p}_i \notin \text{Supp } M$ です. ここで $\mathfrak{p} \in \text{Spec } M$ であって $\dim(A/\mathfrak{p}) = d$ となるようなものが存在すれば, それは $\mathfrak{p} \in \text{Assh } A$ となるので矛盾します. よって

$$\dim M = \sup\{\dim(A/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Supp } M\}$$

について, $\dim M \neq d$ です. よって左辺は $e(\mathfrak{q}, M) = 0$ であることが分かります.

1.2.2 $\sigma > 0$ の場合

ある $\mathfrak{p} \in \text{Assh } A$ に対して $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ となるから $\mathfrak{p}$ は $\text{Supp } M$ の極小元となり, $\mathfrak{p} \in \text{Ass } M$ です. よって単射 $A/\mathfrak{p} \rightarrow M$ が存在します. この余核を C とすることで, A 加群の完全列

$$0 \rightarrow A/\mathfrak{p} \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow 0$$

が得られるので, 定理 14.6 により

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p}) + e(\mathfrak{q}, C)$$

が成り立ちます. ここでこの完全列の $\mathfrak{p}_i$ による局所化を考えます. すると

- $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$ のとき, $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}_i} \cong A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ で, $l_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = 1$.
- $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$ のとき, $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}_i} = 0$.

となります. 特に後者について, $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}_i$ を取れば $A/\mathfrak{p} \otimes_A A_{\mathfrak{p}_i}$ の任意の元は

$$\bar{a} \otimes \frac{b}{s} = \bar{a} \otimes \frac{xb}{xs} = \overline{ax} \otimes \frac{b}{sx}$$

とでき, $ax \in \mathfrak{p}$ よりこれは 0 になることから従います. よって $A_{\mathfrak{p}_i}$ 加群の完全列

$$0 \rightarrow (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}_i} \rightarrow M_{\mathfrak{p}_i} \rightarrow C_{\mathfrak{p}_i} \rightarrow 0$$

について, それぞれの長さを考えれば

$$\sum_{i=1}^t l(C_{\mathfrak{p}_i}) = \sum_{i=1}^t l(M_{\mathfrak{p}_i}) - l((A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}_i}) = \sigma - 1$$

となるので C に対して帰納法の仮定を適用することができます. $e(\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p}) = e(\bar{\mathfrak{q}}, A/\mathfrak{p})$ と合わせて

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\bar{\mathfrak{q}}, A/\mathfrak{p}) + \sum_{i=1}^t e(\bar{\mathfrak{q}}_i, A/\mathfrak{p}_i) l(C_{\mathfrak{p}_i})$$

で, $l(C_{\mathfrak{p}_i}) = l(M_{\mathfrak{p}_i}) - l((A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}_i})$ を用いれば, $e(\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p})$ がキャンセルされて

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{i=1}^t e(\bar{\mathfrak{q}}_i, A/\mathfrak{p}_i) l(M_{\mathfrak{p}_i})$$

を得るので, 主張が示されました.