1　正則局所環の随伴次数環は多項式環と同型

1.1　主張

定理 1.1 (14.4)**.** $(A, \mathfrak{m}, k)$ が d 次元正則局所環なら

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[X_1, \ldots, X_d]$$

松村「復刊 可換環論」の証明中で, "I は斉次イデアル"と進めていますが, 斉次であることに注目しなくても証明はうまくいきます. そのことを見てみましょう.

1.2　主張の証明

$(A, \mathfrak{m})$ が d 次元正則局所環なので, $\mathfrak{m}$ は d 個の元で生成されます. p.114 の 13 行目の議論から

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[X_1, \ldots, X_d]/I$$

の形であることが分かります. あとは $I = 0$ であることを示せばよいです. ここまでの流れは同じです. ここで次の事実を用います.

定理 1.2 (演習問題 5.1 の系)**.** k を体, $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, I が R のイデアルなら

$$\mathrm{ht}\, I + \dim R/I = n$$

証明. 松村「復刊 可換環論」の演習問題 5.1 によれば, 上の定理の $I \in \mathrm{Spec}\, R$ については主張が正しいことが分かる. 素イデアルとは限らない R のイデアル I に対して, $\mathrm{ht}\, I = \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}$ となる $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ を取ると

$$\mathrm{ht}\, I + \dim(R/I) \geq \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} + \dim(R/\mathfrak{p}) = n$$

また, 一般に次の不等式が成り立つのだった.

$$\mathrm{ht}\, I + \dim(R/I) \leq \dim R = n$$

よって

$$\mathrm{ht}\, I + \dim(R/I) = n$$

が成り立つ. □

これを用いることで

$$\dim \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) = d - \mathrm{ht}\, I$$

が分かります. ここで定理 13.9 によれば $\dim \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) = \dim A = d$ なので

$$\mathrm{ht}\, I = 0$$

です. 今 $k[X_1, \ldots, X_d]$ は整域であるので, $I = 0$ が分かります. 以上で主張が示されました.