1　定理 14.14 の証明の第一段

1.1　定理の主張

定理 1.1 (14.14)**.** $(A, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元ネーター局所環とで k が無限体であるとし, $\mathfrak{q} = (u_1, \ldots, u_s)$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. このとき $u_1, \ldots, u_s$ の「十分一般な」d 個の一次結合

$$y_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} u_j \quad (i = 1, \ldots, d)$$

をとれば, $\mathfrak{b} = (y_1, \ldots, y_d)$ は $\mathfrak{q}$ の節減であり, $\{y_1, \ldots, y_d\}$ は A の巴系である.

証明は第一段から第三段に分かれており, 約 3 ページに渡って書かれています. ここでは, そのうちの第一段について詳しく見ていきます. また, 定理の主張中の”十分一般な”という表現は, 証明中の第三段で詳しく説明されるのでここでは割愛します.

1.2　証明 (第一段)

まず $d = 0$ なら成り立つことがすぐにわかるので $d > 0$ の場合を考えます. 第一段 p.136 の 9 行目までは定理 14.5 ですでに行った議論なので, その続きから考えていきましょう.

Q を $\mathfrak{q}$ の零形式として, 定理 13.8 を適用すると

$$\dim k[X]/Q = d$$

であることが分かります. ここで $k[X]$ の部分空間として

$$V = \sum_{i=1}^{s} kX_i$$

を考え, Q の極小素イデアルを $P_1, \ldots, P_t$ とします. このとき各 i に対して $P_i \not\supset V$ となり, $P_i \cap V$ が V の真の部分空間であることが分かります.

証明. ある i で $P_i \supset V$ と仮定すると, $V \in \operatorname{Max} k[X]$ であることより $P_i = V$ となる. また, Q の極小素イデアル P_j が存在して

$$\dim k[X]/P_j = \dim k[X]/Q = d$$

を満たす. 定理 13.7 より P_j は斉次素イデアルだから全体に一致せず, 0 次成分を持たないので $P_j \subset V$.

$$\dim k[X]/V = \dim k = 0$$

で $d > 0$ だから, 特に $P_j \subsetneq V$ が成り立つ. よって $P_j \subsetneq P_i$ となり, 極小性に矛盾する. 以上より, $P_i \not\supset V$. □

次に, k が無限体であるという仮定を用いることで次のことを示します.

$$V \neq \bigcup_{i=1}^{t} (V \cap P_i)$$

証明. $W_i := V \cap P_i$ とおく. t に関する帰納法で示す. $t = 1$ のときは $V \neq W_1$ であるが, これはすでに示した. $t > 1$ のとき,

$$V = \bigcup_{i=1}^{t} W_i$$

と仮定すると $V \neq W_t$ であるから, $x \in V \setminus W_t$ が取れる. また, 帰納法の仮定から

$$y \in V \setminus \bigcup_{i=1}^{t-1} W_i$$

が取れる. ここで集合

$$\{x+\lambda y \mid \lambda \in k\} \subset \bigcup_{i=1}^{t} W_i$$

を考えると, これは k が無限体であることから無限集合であり, 鳩ノ巣原理から

$$x+\alpha y,\ x+\beta y \in W_i \quad (\alpha, \beta \in k)$$

となる W_i および $\alpha \neq \beta$ が存在する. すると $(\alpha-\beta)y \in W_i$ となり, $\alpha-\beta \neq 0$ から $y \notin W_i$ である. しかし $i=t$ なら $x \in W_t$ となり矛盾, $i \neq t$ なら

$$y \in \bigcup_{i=1}^{t-1} W_i$$

となり矛盾. 以上より示された. □

このことから $l_1(X) \in V$ を任意の i に対して $l_1(X) \notin P_i$ として取ることができます. このとき次が成り立つことを直接示すことができます.

$$\dim k[X]/(Q, l_1(X)) = d-1$$

証明. まず $\leq$ を示す. (Q, l_1) の極小素イデアル P を

$$\dim k[X]/(Q, l_1(X)) = \dim k[X]/P$$

となるものとして取る. このとき $l_1 \in P$ であるから $P \neq P_i$ $(\forall i)$ である. よって, ある i が存在して $P_i \not\subset P$ となるから, $\operatorname{ht} P_i \geq \operatorname{ht} Q$ と合わせると

$$\operatorname{ht} P \geq \operatorname{ht} P_i + 1 \geq \operatorname{ht} Q + 1$$

となる. ここで $\operatorname{ht} Q = \dim k[X] - \dim k[X]/Q = s-d$ より

$$\dim k[X]/(Q, l_1(X)) = \dim k[X] - \operatorname{ht} P \leq s-(s-d+1) = d-1$$

となる.

次に $\geq$ を示す. 定理 13.8 において

$$R = k[X]/Q, \quad \xi_i = X_i + Q$$

とすれば $M = \sum R\xi_i \in \operatorname{Max} R$ であり, 定理を適用すれば $\dim R_M = \dim R = d$ となる. また

$$\dim R/l_1 R \geq \dim R_M/l_1 R_M$$

である. 右辺を n として $R_M/l_1 R_M$ の巴系を $x_1, \ldots, x_n \in M$ とする. このとき

$$l\left(R_M/(l_1, x_1, \ldots, x_n)R_M\right) \leq \infty$$

であるから, R_M の $n+1$ 個の元 $l_1, x_1, \ldots, x_n$ は R_M の巴系である. すなわち $\dim R_M \leq n+1$ となる. 以上を合わせて

$$\dim R/l_1 R \geq \dim R_M - 1 = d-1$$

となる. □

今 Q も (Q, l_1) も斉次イデアルであることに注意すれば, この議論を繰り返し適用することで

$$\dim k[X]/(Q, l_1(X), \ldots, l_d(X)) = 0$$

となるように $l_1(X), \ldots, l_d(X) \in V$ を取ることができます. $(Q, l_1(X), \ldots, l_d(X))$ の任意の極小素イデアルを $\mathfrak{p}$ とすると, 定理 13.7 よりこれも斉次イデアルであって $k[X]$ と一致しないことから $\mathfrak{p} \subset V$ となります. 特に $\dim k[X]/\mathfrak{p} = 0$ なので $\mathfrak{p} = (X_1, \ldots, X_n)$ です. 以上より

$$\sqrt{(Q, l_1(X), \ldots, l_d(X))} = (X_1, \ldots, X_n)$$

となるので $(Q, l_1(X), \ldots, l_d(X))$ は $(X_1, \ldots, X_n)$-準素イデアルであることが分かります.