1　次数環の 0 次成分が部分環であること

松村英之「復刊 可換環論」では G を 0 を単位元に持つ可換半群として, 可換環 R が加法群としての直和分解

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$$

において $R_i R_j \subset R_{i+j}$ を満たすとき, R が次数環であると定めています.

定義から $R_0 R_0 \subset R_0$ が成り立つので, R_0 は積で閉じていることが分かります. 一方, これだけでは R_0 が R と同じ単位元を持つことはわからないため, その意味では R_0 が R の部分環であるとは限りません. 以下, 反例と部分環となる十分条件を見ていきます.

1.1　反例

人工的な例ですが, 次のような反例があります.

例 1.1. $G = \{0, 1\}$ を次の演算で定まる可換半群とする.

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1$$

また k を体として $R = k \times k$ とし,

$$R_0 = k \times 0, \quad R_1 = 0 \times k$$

と定めると, $R = R_0 \oplus R_1$ となり,

$$R_0 R_0 \subset R_0,\ R_0 R_1 \subset R_1,\ R_1 R_1 \subset R_1$$

なので R は次数環となる. しかし R_0 は R と単位元を共有する部分環ではない.

1.2　簡約律のもとでの証明

上のような反例があるものの, 実用上は次の簡約律が成り立つ G で考えることが多いため, 特に問題にはならないことが分かります. 例えば $G = \mathbb{Z},\ \mathbb{N},\ \mathbb{N}^n$ は簡約律を満たします.

命題 1.2. G を 0 を単位元に持つ可換半群とし, $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ を次数環とする. このとき, 任意の $a, b, c \in G$ に対して

$$a + c = b + c \implies a = b$$

が成り立つならば R_0 は R の部分環である.

証明. 単位元 $1 \in R$ について $1 \in R_0$ を示す.

$$1 = \sum_{g \in G} e_g, \quad e_g \in R_g$$

と斉次元に分解すると, 任意の $x_h \in R_h$ に対して

$$x_h = x_h e_0 + \sum_{g \neq 0} x_h e_g$$

となる. ここで $x_h e_g \in R_{g+h}$ であって, 簡約律より $g \neq 0$ ならば $g + h \neq h$ となる. すなわち

$$\sum_{g \neq 0} x_h e_g$$

は h 次の斉次成分を持たないことが分かるので

$$x_h = x_h e_0$$

を得る. 以上より任意の $x \in R$ に対して $x = x e_0$ が成り立つので, $e_0 = 1 \in R_0$. □